Janvier 2007

On considère un système quantique à deux degrés de liberté (q,p) et possédant un spectre d'énergie discret E_n (n = 1,…, W). Écrivez l'opérateur Hamiltonien de ce système en fonction des variables q et p. Soit $|\psi_n>$ et $|\psi_m>$ deux kets propres de l'Hamiltonien. Montrez que pour tout opérateur Â l'identité suivante est toujours vérifiée: $\langle\psi_m|\left[\hat{A},\hat{H}\right]|\psi_n\rangle = (E_n - E_m)\langle\psi_m|\hat{A}|\psi_n\rangle$.

Que peut-on dire de la valeur moyenne du commutateur $\left[\hat{A},\hat{H}\right]$ dans tout état propre de l'Hamiltonien non dégénéré? Evaluez ce commutateur dans le cas particulier où $\hat{A} = \hat{q}\cdot\hat{p}$. En déduire que la valeur moyenne de l'énergie cinétique prise sur un état propre quelconque $|\psi_n>$ de l'Hamiltonien est toujours égale à la valeur moyenne de l'opérateur $\hat{V} = \frac{1}{2}\hat{q}\cdot\frac{dU}{d\hat{q}}$ prise sur ce même état. Appliquez ces considérations à l'atome d'hydrogène. En déduire l'énergie de liaison de l'électron dans l'état fondamental en fonction de q. Appliquez la relation d'incertitude d'Heisenberg à cet état fondamental de l'atome d'hydrogène. En déduire que l'incertitude sur la position de l'électron est voisine de $\Delta q \approx \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$ et que l'énergie de liaison associée vaut $E = -\frac{m_e}{2}\cdot\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}\right)^2$. Exprimez cette énergie de liaison en unité eV sachant que : $m_e = 9{,}11.10^{-31}$ kg, $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s et $\varepsilon_0 = 8{,}854.10^{-12}$ $C.V^{-1}.m^{-1}$

Janvier 2008

On considère une particule libre ($\hat{V}$ =0) de masse m caractérisée par l'Hamiltonien: $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$, où $\hat{p}$ est l'opérateur associé à sa quantité de mouvement. Montrez en appliquant le théorème d'Ehrenfest que la valeur moyenne $<\hat{p}>$ ne varie pas dans le temps. En déduire que la position moyenne de la particule variera dans le temps comme $<\hat{q}> = \frac{<\hat{p}>_0}{m}t + <\hat{q}>_0$ où $<\hat{p}>_0$ et $<\hat{q}>_0$ représentent la position moyenne et l'impulsion moyenne au temps t = 0. Montrez que l'écart quadratique associé à l'observable $\hat{p}$, $(\Delta p)^2 = <\hat{p}^2> - <\hat{p}>^2$, reste constant au cours du temps. Montrez que $\frac{d<\hat{q}^2>}{dt} = \frac{1}{m}(<\hat{q}\hat{p}> + <\hat{p}\hat{q}>) = \frac{2}{m^2}<\hat{p}^2>$. En déduire que la variation de l'écart quadratique associé à l'observable $\hat{q}$, $(\Delta q)^2 = <\hat{q}^2> - <\hat{q}>^2$, obéit à l'équation différentielle: $\frac{d^2(\Delta q)^2}{dt^2} = \frac{2}{m^2}<\hat{p}^2> - \frac{2}{m}<\hat{p}>\frac{d<\hat{q}>}{dt}$. Intégrez cette équation pour trouver la variation de $(\Delta q)^2$ en fonction du temps.

Janvier 2009

1. On considère une particule de masse m placée dans un puits de potentiel tel que V(x) = 0 si $|x| \leq a$ et $V(x) = +\infty$ si $|x| > a$. L'opérateur hamiltonien du système dans la représentation de Schrödinger s'écrit donc : $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\cdot\frac{d^2}{dx^2}$. Soit la fonction $\psi(x) = k(a^2 - x^2)$ où k est un réel strictement positif. Cette fonction d'onde décrit-elle un état stationnaire ? Trouver la valeur de k permettant de normaliser cette fonction d'onde à l'unité, c'est-à-dire telle que $\int_{-a}^{+a}\psi^*(x)\cdot\psi(x)\cdot dx = 1$. Donner l'expression de l'opérateur $\hat{H}^2$ et évaluer l'action de cet opérateur sur la fonction ψ(x). En déduire que la valeur moyenne $\langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle$ est nulle.

Montrer d'autre part que : $\langle\psi|\hat{H}^2|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{H}\hat{H}|\psi\rangle = \int_{-a}^{+a}\langle\psi|\hat{H}|x\rangle\langle x|\hat{H}|\psi\rangle\cdot dx = \int_{-a}^{+a}\left|\hat{H}\psi(x)\right|^2\cdot dx = \dfrac{15\hbar^4}{8m^2a^4} \neq 0$. Quelle est la bonne réponse et quelle est l'origine de cette inconsistance?

2. On souhaite quantifier le mouvement d'une particule libre de masse m contrainte sur un cercle de rayon r_0. Soit (x,y) le plan contenant ce cercle et $\mathcal{L} = \left(m\dot{x}^2 + m\dot{y}^2\right)/2$, le Lagrangien du système. Montrer que le changement de variable ($x = r_0\cdot\cos\theta$, $y = r_0\cdot\sin\theta$) permet d'écrire ce Lagrangien sous la forme $\mathcal{L} = \left(mr_0^2\cdot\dot{\theta}^2\right)/2$. En déduire le moment conjugué de la variable θ $\left(p_\theta = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{\theta}\right)$ et montrer que l'hamiltonien du système peut s'écrire : $H(\theta,p_\theta) = \dot{\theta}\cdot p_\theta - \mathcal{L} = p_\theta^2/2mr_0^2 = L_z^2/2mr_0^2$. Soit $\hat{\theta}\psi(\theta) = \theta\cdot\psi(\theta)$ et $\hat{p}_\theta\psi(\theta) = -i\hbar\cdot\partial\psi(\theta)/\partial\theta$ les opérateurs quantiques associés aux variables classiques θ et p_θ. Montrer que ces deux opérateurs satisfaisont à la relation de commutation canonique $\left[\hat{\theta},\hat{p}_\theta\right] = i\hbar$. Soit $\mathscr{H}$ l'espace de Hilbert correspondant muni du produit scalaire $\langle\varphi|\psi\rangle = \int_0^{2\pi}\varphi^*(\theta)\cdot\psi(\theta)\cdot d\theta$. Donner les domaines de définition sur $\mathscr{H}$ où ces deux opérateurs sont self-adjoints. Écrire l'équation de Schrödinger de ce système dans cette représentation {θ} et trouver la forme générale des solutions.

Janvier 2010:

1. On considère un électron de masse m et de charge –e situé à une distance x (x > 0) d'un conducteur parfait produisant un potentiel $V(x) = e/(16\pi\varepsilon_0 x)$. Écrire l'opérateur hamiltonien de ce système à une dimension dans la représentation de Schrödinger. Montrer que la fonction $\psi(x) = N\cdot x\cdot\exp(-\alpha x)$ où N et α sont des nombres réels strictement positifs est fonction propre de l'hamiltonien à condition que $\hbar^2\alpha = me^2/(16\pi\varepsilon_0)$. En déduire que l'énergie E associée à cet état vaut $E = -(m/32)\cdot(e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar)^2$. Quelle est la valeur du coefficient de normalisation N de cet état ? Montrer que dans cet état $\langle x\rangle = 3/2\alpha$.

2. On considère trois opérateurs quantiques tels que : $\left[\hat{J}_1,\hat{J}_2\right] = i\hat{J}_3$, $\left[\hat{J}_2,\hat{J}_3\right] = i\hat{J}_1$, $\left[\hat{J}_3,\hat{J}_1\right] = i\hat{J}_2$. Montrer que l'opérateur $\hat{J}^2 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2$ commute avec $\hat{J}_1$, $\hat{J}_2$ ou $\hat{J}_3$.